

ЛОКАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ ДЛЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

Ф. Т. ШАМШИЕВ

Физический факультет Национального университета Узбекистана им. Мирзо-Улугбека
E-mail: shamshiyev_f@nuu.uz



Аннотация

Исследуется локальный интеграл движения, позволяющий непосредственно определить поле скоростей при некоторых заданных начальных условиях. Речь идёт об изолированной инвариантной поверхности в фазовом пространстве, задаваемой уравнением, квадратичным по компонентам скорости. Перечислены все двумерные потенциальные поля, допускающие существование локального квадратичного интеграла Антонова [1] в случае вращающихся систем.

Ключевые слова: звёздная динамика, вращающиеся системы, локальный квадратичный интеграл, потенциальное поле

1. Введение

Интегралы движения, квадратичные по скоростям и независимые от интеграла энергии, достаточно хорошо изучены в механике для движения частицы в стационарном потенциальном поле [2, 3]. В звёздной динамике такой интеграл наиболее подробно исследован Г. Г. Кузминым [4]. При наличии вращения с постоянной угловой скоростью $\Omega \neq 0$ поиск дополнительного квадратичного интеграла был предпринят Вандервоортом [5], однако при предварительном условии симметрии потенциала

$$U(x, y) = U(-x, -y)$$

И условие чётности самого интеграла движения при инверсии (при этом не рассматривается возможность нечётности интеграла относительно той же операции). За исключением некоторых тривиальных случаев, в работе [5] получается однозначное выражение потенциала, удовлетворяющего поставленным условиям. В частности, потенциал $U(x, y)$ (с учётом центробежных сил) должен быть обратно пропорционален произведению расстояний до двух фиксированных точек.

В предлагаемой работе мы, не накладывая ограничений на симметрию потенциала, решаем более общую задачу перечисления всех двумерных потенциалов с учётом вращения, допускающих существование локального квадратичного интеграла В. А. Антонова [1], в отличие от подхода Lynden-Bell [6].

2. Постановка задачи

Локальный интеграл при движении в поле с потенциалом U и угловой скоростью вращения Ω , согласно вышесказанному, ищем в виде

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + Du + Ev + F = 0, \quad (1)$$

где A, B, C, D, E и F – некоторые функции координат x, y . По смыслу локального интеграла, если начальные условия удовлетворяют (1), то это равенство должно быть справедливо для всех t , каково бы ни было величина интеграла Якоби

$$\frac{u^2 + v^2}{2} - \frac{\Omega^2(x^2 + y^2)}{2} - U = h. \quad (2)$$

Для определения коэффициентов $A, B, \dots, F$ как функций координат мы заметим, что применение оператора дифференцирования вдоль траектории

$$L = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \left(-\frac{\partial U}{\partial x} + 2\Omega v \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left(-\frac{\partial U}{\partial y} - 2\Omega u \right) \frac{\partial}{\partial v} \quad (3)$$

к левой части (1), обозначаемой далее через J , должно давать нуль, если $J = 0$. Поскольку по своей природе $L\{J\}$ – многочлен относительно u и v третьей степени, ясно, что он должен делиться на J :

$$L\{J\} = (au + bv + c)J, \quad (4)$$

тождественно, с некоторыми функциями координат a, b, c . Совокупность членов второй степени в J обозначим как J_1 . Очевидно она должна разлагаться на линейные множители:

$$J_1 = (u \sin t - v \cos t)(u \sin \sigma - v \cos \sigma) \quad (5)$$

с точностью до некоторого общего для J множителя, не играющего вообще роли для локального интеграла.

Тогда

$$A = \sin t \sin \sigma, \quad B = -\frac{\sin(\sigma + t)}{2}, \quad C = \cos t \cos \sigma.$$

Сравнение членов третьей степени в (4) дает

$$u \frac{\partial J_1}{\partial x} + v \frac{\partial J_1}{\partial y} = (au + bv)J_1.$$

Коэффициенты a и b в (6) теперь получается простым делением:

$$a = -\frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \quad b = \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

с определяется

$$2 \left[\frac{\partial D}{\partial x} u^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial x} \right) uv + \frac{\partial E}{\partial y} v^2 \right] + 2\Omega \left(v \frac{\partial J_1}{\partial u} - u \frac{\partial J_1}{\partial v} \right) = cJ_1 + 2(au + bv)(Du + Ev). \quad (7)$$

При конкретных $u = \cos \sigma, v = \sin \sigma$ или $u = \cos t, v = \sin t$

$$D = -R \sin t - R_1 \sin \sigma, \quad E = R \cos t + R_1 \cos \sigma.$$

Выписывая в (4) все члены нулевой и первой степени, получаем систему уравнений для F и U :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} - 4\Omega E - 2A \frac{\partial U}{\partial x} - 2B \frac{\partial U}{\partial y} &= 2cD + aF \\ \frac{\partial F}{\partial y} + 4\Omega D - 2B \frac{\partial U}{\partial x} - 2C \frac{\partial U}{\partial y} &= 2cE + bF \\ -2D \frac{\partial U}{\partial x} - 2E \frac{\partial U}{\partial y} &= cF \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений (8) при заданных коэффициентах A, B, C, D, E выраженных через функции углов $\tau(x, y)$ и $\sigma(x, y)$, с целью нахождения таких потенциальных функций $U(x, y)$, при которых существует локальный квадратичный интеграл движения в форме (1).

3. Построения потенциала

Для упрощения решения системы (8), которая представляет собой нелинейную систему уравнений в частных производных первого порядка относительно функций $F(x, y)$ и $U(x, y)$, целесообразно выбрать систему координат таким образом, чтобы в начале координат касательная к огибающей была параллельна оси ординат. Тогда в этой точке $\sigma = \pi/2$. Подставляем в (8) асимптотические разложения

$$F = F_0(y)(x \cos \sigma + y \sin \sigma - f''(\sigma)) + \dots$$

$$U = U_0(y) + U_1(y)(x \cos \sigma + y \sin \sigma - f''(\sigma)) + \dots$$

Подстановка в первое и третье уравнения (8) после естественных сокращений дает $F_0 - 2U_1 \sin \sigma = 0$, $F_0 + U_1 \sin t = 0$, откуда следует $F_0 = 0$, $U_0 = 0$. Но тогда $\xi = 0$ на всей плоскости и опять $F = 4RR_1$, что дает локальный интеграл.

Построены потенциалы для случаев, когда $\sigma = \tau$, а также для ситуаций, в которых σ и τ имеют специальный характер, включая случаи $\sigma = \theta$, $\tau = -\theta$ ($\theta = \text{const.}$). Результаты этих исследований будут опубликованы отдельно.

Заключение

Результаты проведённого исследования представляют собой некоторое обобщение ранее известных решений задачи о существовании квадратичных интегралов движения в потенциальных полях. В частности, получены новые классы двумерных потенциальных полей, допускающих существование локального квадратичного интеграла в присутствии вращения с постоянной угловой скоростью $\Omega \neq 0$. Эти результаты расширяют выводы, полученные ранее Vandervoort [5], где предполагалась строгая симметрия потенциала, и уточняют условия, при которых возможно существование инвариантных поверхностей, заданных квадратичными по скоростям уравнениями. Новизна подхода заключается в отказе от ограничений на симметрию потенциальной функции и в использовании более общего понятия локального интеграла В. А. Антонова [1]. Это позволило описать более широкий класс потенциальных полей, по сравнению с теми, которые допускают истинные интегралы движения.

Таким образом, результаты исследований не только обобщают известные случаи, но и открывают возможности для приложения построенных локальных интегралов в задачах звёздной динамики, включая моделирование плоских и осесимметричных вращающихся галактических систем, где истинные интегралы могут отсутствовать, но локальные сохраняющие поверхности всё же определяют характер движения [7-9].

Литература

- Антонов В.А., Вестник ЛГУ, 1981, №19, с.97
- Jacobi's Lectures on Dynamics Second Revised Edition, Hindustan Book Agency (India), 2009
- Уиттекер Э. Аналитическая динамика, М., 378 с., 1937
- Кузмин Г.Г. Астрономический журнал, т.33, №1, с.35-48, 1956
- Vandervoort, P.O., 1979, The Astrophysical Journal, 232, 91-105
- Lynden-Bell, D.: 2016, MNRAS 458, 726–732
- Antonov, V.A., Shamshiev F.T., 1993, Cel. Mech. and Stellar Dyn., 56, 451-469.
- Antonov, V.A., Shamshiev F.T., 1994, Cel. Mech. and Stellar Dyn., 59, 209-219
- Шамшиев Ф.Т., Астрономический журнал, 2025, том 102, №5, с.84–97